

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD -IZTAPALAPA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

*Órbitas periódicas en el problema
restringido de cuatro cuerpos.*

Tesis que presenta:
Jaime Burgos García

Para obtener el grado de:
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Asesor

Dr. Joaquín Delgado Fernández

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
México, Marzo de 2013

*“Cuando mayor es la dificultad,
mayor es la gloria”
Marco Tulio Cicerón*

Agradecimientos

El presente trabajo es el “fin” de un camino que comenzó hace 9 años cuando ingresé por primera vez a esta, mi adorada universidad que tantas cosas me ha dado. Quiero agradecer en primer lugar a mis amigos y mentores, el Dr. Mario Pineda Ruelas y Gabriel Hernández Hernández quienes me introdujeron al vasto terreno que son las Matemáticas con sus conocimientos y sabios consejos cuando andaba de hoja al viento. Espero haber sido un digno discípulo. Agradezco enormemente a mi asesor el Dr. Joaquín Delgado Fernández quien hizo posible este trabajo, gracias *prof* por su paciencia, por sus consejos profesionales y personales que me alentaron a seguir adelante y por el privilegio de permitirme trabajar con usted. También quiero agradecer a los profesores del área de Mecánica Celeste de la UAM-I, a mis sinodales y a los profesores Jaime Llibre y Esther Barrabés en Barcelona España por sus comentarios y críticas que me ayudaron a tomar nuevos rumbos y mejorar mis investigaciones. A mi esposa Dania quien me dio una preciosa hija y que estuvo conmigo en la parte final de este trabajo, gracias por tu amor y comprensión *conejita*. A mis amigos que conocí en estos años en la UAM, por los buenos momentos y por esas “fiestas” que compartimos juntos. Debo decir que este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo económico brindado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACyT a quien agradezco todo el apoyo brindado durante estos años.

Sin embargo, quiero hacer una mención especial y agradecer a mis padres Jaime Burgos y Marina García por todo el apoyo brindado, por sus enseñanzas y por darme la vida, espero haber compensado en algo los corajes y desvelos que he ocasionado, a mi hermana por esos años que pasamos juntos, por los momentos difíciles y alegres que vivimos *pelusa*. Finalmente, agradezco a esa *fuerza* extraña que llamamos *dios* por la oportunidad de comenzar este camino.

Índice general

1. Introducción y Preliminares	6
1.1. Introducción	6
1.2. Preliminares	9
1.2.1. Sistemas Hamiltonianos	9
1.2.2. Configuraciones centrales	10
1.2.3. Estabilidad	12
2. El Problema Restringido de Cuatro Cuerpos	14
2.1. Planteamiento del Problema	14
2.2. Ecuaciones de Movimiento	15
2.3. Formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana del Problema Restringido de 4 cuerpos	19
3. Aspectos Dinámicos del Problema	22
3.1. Regiones de Hill	22
3.2. Soluciones de equilibrio relativo	23
3.2.1. Estudio de los equilibrios relativos	25
3.3. Estudio de la estabilidad de los equilibrios relativos	28
3.3.1. Estabilidad de los equilibrios relativos en el PR4C	29
4. Forma Normal en el Punto de Equilibrio L_2	36
4.1. Teoría de perturbación y formas normales	37
4.2. Aplicación de la teoría de formas normales al punto L_2	42
4.2.1. La forma normal lineal	42
4.2.2. Los términos de orden superior	44
4.2.3. Análisis de la forma normal en L_2	47
4.2.4. La función de Melnikov	51
4.3. Estudio numérico de las variedades estable e inestable de L_2	54
5. Regularización en el PR4C	61
5.1. Regularización de colisiones con m_2 y m_3	65
5.2. Regularización simultánea de colisiones con las tres primarias	67

6. Órbitas Periódicas en el PR4C	72
6.1. Teoría preliminar sobre órbitas periódicas	73
6.2. El método de continuación analítica	76
6.3. Órbitas generadoras y el problema de Kepler en el PR4C	84
6.4. Órbitas de segunda especie	90
6.4.1. Familias de arcos en el PR3C	91
6.4.2. Familias de arcos en el PR4C	98
6.5. Estabilidad de órbitas periódicas y bifurcaciones	103
6.6. La búsqueda numérica de familias de órbitas periódicas	110
6.6.1. Continuación numérica	110
6.6.2. Continuación numérica por pseudolongitud de arco	111
7. Clasificación de Familias de Órbitas Periódicas	114
7.1. La familia g de órbitas periódicas directas alrededor de m_1	115
7.2. La familia f de órbitas retrógradas alrededor de m_1	116
7.3. La familia a de órbitas retrógradas alrededor de L_1	117
7.4. La familia g_4	118
7.5. La familia g_6	119
7.6. La familia m de órbitas retrógradas alrededor de m_1 , m_2 y m_3	119
7.7. La familia j de órbitas retrógradas alrededor de m_2 y m_3	121
7.8. La familia j_2	122
7.9. La familia r_2 de órbitas asintóticas a L_2	122
7.10. Puntos críticos en las familias de órbitas periódicas	124
7.11. Estudio de la estabilidad de las familias de órbitas periódicas	125
7.12. Ilustraciones de órbitas periódicas de las familias encontradas	127
8. Conclusiones	134